El Ext - álgebra para deformaciones infinitesimales.

Lucrecia Juliana Román

Departamento de Matemática - Instituto de matemática - Universidad Nacional del Sur.

XVII Congreso Dr. Antonio Monteiro.

álgebra asociativa $A \rightsquigarrow$ álgebra asociativa A_f

álgebra asociativa $A \rightsquigarrow$ álgebra asociativa A_f

álgebra asociativa $\mathrm{Ext}^*_A(S,S) \rightsquigarrow$ álgebra asociativa $\mathrm{Ext}^*_{A_f}(S,S)$

Deformación infinitesimal

- A una k-álgebra asociativa de dimensión finita.

Deformación infinitesimal

- A una k-álgebra asociativa de dimensión finita.

Definición:

Sea $f \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$, $A_f := A[t]/(t^2) \simeq A \oplus A$ el álgebra con multiplicación μ dada por

$$\mu(a_0 + a_1 t, b_0 + b_1 t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + f(a_0, b_0))t.$$

Si este producto μ es asociativo, decimos que A_f es una *deformación infinitesimal de A.*

Deformación infinitesimal

Gerstenhaber

μ es asociativo $\iff$ f es un 2-cociclo de Hochschild
$\iff af(b \otimes c) - f(ab \otimes c) + f(a \otimes bc) - f(a \otimes b)c = 0,\ a, b, c \in A$

Ext - álgebra

Definición:

El Ext- álgebra de un A-módulo M es el espacio vectorial

$$\mathrm{Ext}^*_A(M, M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Ext}^i_A(M, M),$$

con la estructura de álgebra asociativa dada por el producto de Yoneda.

Ext - álgebra

Definición:

El Ext- álgebra de un A-módulo M es el espacio vectorial

$$\mathrm{Ext}_A^*(M,M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Ext}_A^i(M,M),$$

con la estructura de álgebra asociativa dada por el producto de Yoneda.

El Ext- álgebra de un álgebra A es el Ext- álgebra del A-módulo $S = A/\operatorname{rad} A$

$$\mathrm{Ext}_A^*(S,S) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Ext}_A^i(S,S).$$

Descripción de mód A_f.

$$\begin{aligned} \text{álgebra } A &\rightsquigarrow \quad \text{mód } A \\ \text{álgebra } A_f &\rightsquigarrow \quad \text{mód } A_f \end{aligned}$$

Descripción de mód A_f.

$$\begin{aligned} \text{álgebra } A &\rightsquigarrow \quad \text{mód } A \\ \text{álgebra } A_f &\rightsquigarrow \quad \text{mód } A_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mód } A_f &\longleftrightarrow \mathcal{C}_f \\ {}_{A_f}M &\longleftrightarrow (M_0, M_1, T_M, f_M) \\ & \qquad M_0, M_1 \ A\text{-módulos.} \end{aligned}$$

Categoría $\mathcal{C}_f$.

- Módulos: (M_0, M_1, T_M, f_M)
  - M_0, M_1, A-módulos.
  - $T_M : M_0 \to M_1$ un A-monomorfismo.
  - $f_M : A \otimes_k M_0 \to M_1$ un map k-lineal satisfaciendo:

$$af_M(b \otimes m_0) - f_M(ab \otimes m_0) + f_M(a \otimes bm_0) - f(a \otimes b)T_M(m_0) = 0.$$

- Morfismo: $(u_0, u_1, u_2) : (M_0, M_1, T_M, f_M) \to (N_0, N_1, T_N, f_N)$
  - u_0, u_2, A-morfismos tal que

$$\begin{tikzcd} M_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "T_M"'] & N_0 \arrow[d, "T_N"] \\ M_1 \arrow[r, "u_2"] & N_1 \end{tikzcd}$$

    conmuta.
  - $u_1 : M_0 \to N_1$ map k-lineal tal que

$$u_1(am_0) = au_1(m_0) - u_2(f_M(a \otimes m_0)) + f_N(a \otimes u_0(m_0)).$$

Descripción de mód A_f en términos de mód A.

Teorema:

$\mathcal{C}_f$ y $modA_f$ son categorías equivalentes.

Descripción de mód A_f en términos de mód A.

Teorema:

$\mathcal{C}_f$ y $modA_f$ son categorías equivalentes.

$$\text{mód } A \hookrightarrow \mathcal{C}_f$$

$$_A M \hookrightarrow _{A_f} M = (0, M, 0, 0)$$

mód A es una subcategoría full de $\mathcal{C}_f$

Corolario:

Los A_f- módulos proyectivos son

$$_{A_f}\hat{P} = (P, P, Id, f_P),$$

donde P es un A-módulo proyectivo.

Corolario:

Los A_f- módulos simples son

$$_{A_f}S = (0, S, 0, 0),$$

donde S es un A-módulo simple.

Resoluciones proyectivas

Si

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{\delta_2} P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} M \to 0$$

es una resolución proyectiva minimal del A-módulo M, encontramos los siguientes ejemplos distinguidos de resoluciones proyectivas minimales en mód A_f:

- Caso $(* \text{ A})$

$$\cdots \to \hat{P}_2 \oplus \hat{P}_1 \oplus \hat{P}_0 \longrightarrow \hat{P}_1 \oplus \hat{P}_0 \longrightarrow \hat{P}_0 \longrightarrow {}_{A_f} M \to 0$$

Resoluciones proyectivas

Si

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{\delta_2} P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} M \to 0$$

es una resolución proyectiva minimal del A-módulo M, encontramos los siguientes ejemplos distinguidos de resoluciones proyectivas minimales en mód A_f:

- Caso $(* \text{ A})$

$$\cdots \to \hat{P}_2 \oplus \hat{P}_1 \oplus \hat{P}_0 \longrightarrow \hat{P}_1 \oplus \hat{P}_0 \longrightarrow \hat{P}_0 \longrightarrow {}_{A_f}M \to 0$$

- Caso $(* \text{ B})$

$$\cdots \to \hat{P}_3 \longrightarrow \hat{P}_2 \longrightarrow \hat{P}_1 \longrightarrow \hat{P}_0 \longrightarrow {}_{A_f}M \to 0$$

Si

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{\delta_2} P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} M \to 0$$

es una resolución proyectiva minimal del A-módulo M, decimos que M verifica la :

Condición($*$ A) si $\delta_0\alpha_1\delta_2 = 0$, para $\alpha_1 : P_1 \to P_0$ map lineal, $\alpha_1(x) = \tilde{f}(x \otimes B_1)E_0$, B_1 matriz asociada al morfismo $\delta_1 : P_1 \to P_0$.

Condición ($*$ B) si $\delta_{2i}\alpha_{2i+1}/\operatorname{Nu}\delta_{2i+1}$ es un monomorfismo y $P_{2i} = \alpha_{2i+1}(\operatorname{Nu}\delta_{2i+1}) \oplus \operatorname{Im}\delta_{2i+1}$ como k-espacios vectoriales, donde $\alpha_i(x) = \tilde{f}(x \otimes B_i)E_{i-1}$, B_i matriz asociada a cada morfismo $\delta_i : P_i \to P_{i-1}$.

Resoluciones proyectivas

Teorema:

Si

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{\delta_2} P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} M \to 0$$

es una resolución proyectiva minimal del A-módulo M

- Si M satisface la condición $(* \text{ A}) \Longrightarrow$

$$\cdots \to \hat{P}_2 \oplus \hat{P}_1 \oplus \hat{P}_0 \longrightarrow \hat{P}_1 \oplus \hat{P}_0 \longrightarrow \hat{P}_0 \longrightarrow {}_{A_f}M \to 0$$

  es una resolución proyectiva minimal del A_f-módulo ${}_{A_f}M$.

- Si M satisface la condición $(* \text{ B}) \Longrightarrow$

$$\cdots \to \hat{P}_3 \longrightarrow \hat{P}_2 \longrightarrow \hat{P}_1 \longrightarrow \hat{P}_0 \longrightarrow {}_{A_f}M \to 0$$

  es una resolución proyectiva minimal del A_f-módulo ${}_{A_f}M$.

$\mathrm{Ext}^*_{A_f}(M, N)$

Teorema:

Sean M, N A-módulos.
Si M satisface la condición $(*\ \mathrm{A})$ entonces

$$\mathrm{Ext}^*_{A_f}(M, N) \simeq \mathrm{Ext}^*_{A}(M, N) \otimes_k k[x]$$

Si M satisface la condición $(*\ \mathrm{B})$ entonces

$$\mathrm{Ext}^*_{A_f}(M, N) \simeq \mathrm{Ext}^*_{A}(M, N)$$

como k-espacios vectoriales graduados.

Caso $(* \text{ A})$: Producto de $\mathrm{Ext}^*_{A_f}(S,S)$.

Si $\hat{g} \in \mathrm{Ext}^n_{A_f}(S,S)$, identificamos:

$$\hat{g} \rightsquigarrow \sum_{i=0}^{n} g_i x^{n-i}$$

Teorema:

Si S satisface $(* \text{ A})$, $\hat{g} \in \mathrm{Ext}^n_{A_f}(S,S)$, $\hat{h} \in \mathrm{Ext}^m_{A_f}(S,S)$

$$\hat{h} \circ \hat{g} = \sum_{i,s} (-1)^{s(m-i)} h_i \star g_s \ x^{m+n-i-s} + \sum_{i,s,l} c_{isl} \ h_i \star g_l \alpha_{l+1} \cdots \alpha_s \ x^{m+n-i-s}$$

siendo $\star$ el producto de Yoneda en $\mathrm{Ext}^*_A(S,S)$.

Caso ($*$ A): Producto de $\mathrm{Ext}^*_{A_f}(S,S)$.

Si $\hat{g} \in \mathrm{Ext}^n_{A_f}(S,S)$, identificamos:

$$\hat{g} \rightsquigarrow \sum_{i=0}^{n} g_i x^{n-i}$$

Teorema:

Si S satisface ($*$ A), $\hat{g} \in \mathrm{Ext}^n_{A_f}(S,S)$, $\hat{h} \in \mathrm{Ext}^m_{A_f}(S,S)$

$$\hat{h} \circ \hat{g} = \sum_{i,s} (-1)^{s(m-i)} h_i \star g_s \; x^{m+n-i-s} + \sum_{i,s,l} c_{isl} \; h_i \star g_l \alpha_{l+1} \cdots \alpha_s \; x^{m+n-i-s}$$

siendo $\star$ el producto de Yoneda en $\mathrm{Ext}^*_A(S,S)$.
Si $\mathrm{Im}\,\alpha_i \subseteq \mathrm{rad}\, P_{i-1}, \forall i$

$$\mathrm{Ext}^*_{A_f}(S,S) \simeq \mathrm{Ext}^*_A(S,S) \otimes_k k[x], \text{ como álgebras.}$$

Caso $(* \text{ B})$: Producto de $\mathrm{Ext}^*_{A_f}(S, S)$.

Teorema:

Si S satisface $(* \text{ B})$, el producto de $\hat{g} \in \mathrm{Ext}^n_{A_f}(S, S)$ y $\hat{h} \in \mathrm{Ext}^m_{A_f}(S, S)$ es dado por

$$\hat{h} \circ \hat{g} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ y } n \text{ son impares,} \\ h \star g & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Gracias!